TITLE:

球面天文學要綱(3)

AUTHOR(S):

ニウカム

CITATION:
ニウカム. 球面天文學要綱(3). 天界 1943, 23(267): 9-16

ISSUE DATE:
1943-09-28

URL:
http://hdl.handle.net/2433/168650

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

9. 種々の程度の差　一般に，曆表中の數値は，可なり短かい間隔毎に載せてあるから，上記の挿入算によつて，任意の時の數値を精密に求めるのに充分である．しかしながら，天文の實地計算に於ては，變化そのものが2つの時期の間でひどく變る場合が屢々ある．こんな場合のために，次ぎに記すやうな逐次差法 (successive differences) によつて，數の精密さの檢査をする方法を先づ述べなければならぬ．

或る變化量が幾つか並列してゐる場合には，各數値と，その直前の數値との差を第一差 (first difference) 又は第一次の差 (difference of the first order) と呼ぶ．次ぎに，この第一差の各値と，其の直前のものとの差を第二差又は第二次の差と呼ぶ．同様にして，第三差，第四差などが得られる．

この各次の差を，次ぎの如き符號で表はす．

$$\Delta', \quad \Delta'', \quad \Delta''', \quad \Delta^{\text{iv}}, \quad \cdots\cdots \qquad (a)$$

差を記す最良の形式は，次ぎの (B) 式に示すものである．第1行は各々の差を示す指數であり，その次ぎの行は函數 u の各個の値を示す．故に，

$$\left.\begin{array}{ll}
\Delta'_{1/2} = u_1 - u_0 & \\
 & \Delta''_1 = \Delta'_{3/2} - \Delta'_{1/2} \quad 等々 \\
\Delta'_{3/2} = u_2 - u_1 & \\
 & \Delta''_2 = \Delta'_{5/2} - \Delta'_{3/2} \quad 等々 \\
\Delta'_{5/2} = u_3 - u_2 & \qquad 等々 \\
\quad 等々 &
\end{array}\right\} \qquad (A)$$

これを次ぎの如く並べる，

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
0 & u_0 & & & & & \\
 & — & \Delta'_{1/2} & & & & \\
1 & u_1 & — & \Delta''_1 & & & \\
 & — & \Delta'_{3/2} & — & \Delta'''_{3/2} & & \\
2 & u_2 & — & \Delta''_2 & — & \Delta^{\text{iv}}_2 & \\
 & — & \Delta'_{5/2} & — & \Delta'''_{5/2} & — & \Delta^{\text{v}}_{5/2} \\
3 & u_3 & — & \Delta''_3 & — & \Delta^{\text{iv}}_3 & \\
 & — & \Delta'_{7/2} & — & \Delta'''_{7/2} & — & \Delta^{\text{v}}_{7/2} \quad 等々 \\
4 & u_4 & — & \Delta''_4 & — & \Delta^{\text{iv}}_4 & \\
 & — & \Delta'_{9/2} & — & \Delta'''_{9/2} & — & \Delta^{\text{v}}_{9/2} \quad 等々 \\
5 & u_5 & — & \Delta''_5 & — & \Delta^{\text{iv}}_5 & \\
 & — & \Delta''_{11/2} & — & \Delta'''_{11/2} & — & \Delta^{\text{v}}_{11/2} \\
6 & u_6 & — & \Delta''_6 & — & \Delta^{\text{iv}}_6 & \\
 & — & \Delta'_{13/2} & — & \Delta'''_{13/2} & & \\
7 & u_7 & — & \Delta''_7 & & & \\
 & — & \Delta'_{15/2} & & & & \\
8 & u_8 & & & & &
\end{array}\right\} \qquad (B)$$

即ち，各差は，それを得た２數の中間に記し，その指數は此の２數の和の半分に等しい．故に，同じ指數は同じ水平線上にあつて，偶數次の差は總て整の指數を有ち，奇數次の差は總て分數を指數とする．

一例として，こゝに1895年中の數日間にわたつて，グリニチ時の正午と夜半とに於ける月の黄經と，其の差とを並べて見よう．

1895年一月 日	黄經	Δ'	Δ''	Δ'''	Δ^{iv}	Δ^{v}
1.0	339°36′53.″6					
		+5°55′50.″7				
1.5	345 32 44.3		+1′55.″9			
		+5 57 46.6		+38.″4		
2.0	351 30 30.9		+2 34.3		+2.″1	
		+6 0 20.9		+40.5		−2.″0
2.5	357 30 51.8		+3 14.8		+0.1	
		+6 3 35.7		+40.6		+0.5
3.0	3 34 27.5		+3 55.4		+0.6	
		+6 7 31.1		+41.2		−1.9
3.5	9 41 58.6		+4 36.6		−1.3	
		+6 12 7.7		+39.9		
4.0	15 54 6.3		+5 16.5			
		+6 17 24.2				
4.5	22 11 30.5					

(C)

10. 差によつて誤りを發見すること “差”といふものの使ひ途の最も良い一例は，函數の値の中に一つの誤りがある場合に，それを差によつて發見することである．例へば，今，u の値の一つに，e だけの誤りあるとする．即ち，表の中に，u の代りに $u+e$ が記載されてあるが，他は皆正しいとすると，此の値の前後の第一差は $+e$ や $-e$ を含むことになるから，從つて，第二差は $+e$，$-2e$，$+e$ 等を含む．この方法を續けると，各次の差は下記の如くなる．

u	Δ'には	Δ''には	Δ'''には	Δ^{iv}には	Δ^{v}には
0	…	0	…	0	…
…	0	…	0	…	$+e$
0	…	0	…	$+e$	…
…	0	…	$+e$	…	$-5e$
0	…	$+e$	…	$-4e$	…
…	$+e$	…	$-3e$	…	$+10e$
e	…	$-2e$	…	$+6e$	…
…	$-e$	…	$+3e$	…	$-10e$
0	…	$+e$	…	$-4e$	…
…	0	…	$-e$	…	$+5e$
0	…	0	…	$+e$	…
…	0	…	0	…	$-e$
0	…	0	…	0	…

(2)

即ち，若し元の數値に一つの誤りがあれば，第五差では其れが10倍に增大することになるから（他が皆正しくあれば）誤りは直ぐ見つかる．

一般に，第 n 差の誤りに於ける e の係數を表はす式は，二項定理のものと同じであつて，即ち，

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-s+1)}{1.2.3.4\cdots\cdots\cdots s}$$

である．但し，s は $1,2,3\cdots\cdots n$ 等の値を採る．かうした檢査を行ふ場合に，注意すべきことは，一般に天文計算で取り扱ふ數量は四捨五入に因る誤りが含まれてゐるので，それは差の計算にも現はれて來る．

實地に當つて，どこまで差を計算すべきかは，つまり其の差が收減 (converge) する遲速の度合ひに據る．若し之の數が正確であつて，挿入算に適するほど細かく與へられてゐれば，差は連續的に，叉，急激に收減するから，四捨五入に因る誤りは，差の次數と共に增して，遂には其れが差の最大量となり，＋と－の符號が交互に現はれ，甚だ不規則に見える．――尙，そのほか注意すべきことは：

α. 若し誤りが多くて，且つ偶然的ならば，差によつて其等の存在は現はれるけれど，しかし，果して之の何れの數値が間違つてゐるかは決定し得ない．若し誤りが只一つならば，それは容易に見つけられる．

β. 系統的誤差（即ち，全部にわたつて含まれ，何等かの規則的なもの）は差によつて發見することが出來ない．

11. 高次の差を挿入算に用ゐること　差を用ひる挿入算の應用法が二つある．即ち，それは，

(i) 或る變數の幾つかの値が一つの表として與へられてゐる時，特種の引數の値に對する中間値を求むる場合；

(ii) 元の表の間隔よりも一層小さい間隔の表を作らうとする場合，例へば或る遊星の位置が初め 4 日每とか，5 日每とか，10 日每とかで與へられてゐる時，更に此所に略されてゐる每日の位置を挿入法で求める場合など．

この第 ii の場合にも，第 i の場合と同樣な一般法が用ゐられる．そこで，下に簡單な解說をする．

第一應用法．前に述べたのと同樣，今，等間隔で計算せんとする一變數を u とし，u の差を必要なだけ作り，尙，挿入算を試みやうとする間隔を u_0 と u_1 との間とすれば，代數學の周知の定理により，u_0 から n 番目の u_n の値は，u_0 と，他の各次の差を用ゐて，下の如く表はされる．

$$u_n = u_0 + n\varDelta'_{1/2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\varDelta''_1 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\varDelta'''_{3/2} + \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

即ち，この式の各項の係數は二項定理のものと同じである．さて，n が正の整數の場合に成り立つ此の式は，n が分數の場合にも亦成り立つといふのが“挿入算”の根本假定である．尤も，此の假定は必ずしも常に眞理ではなくて，現に，u の變化の法則が差によつて表はし得ない場合には成り立たないのだけれど，しかし，高次の差が，その間隔や，それ以下の間隔に對して收減するやうな場合には，計算の實際上，何等の心配なく成り立つものである．今，挿入算を試みようとする間隔を挿む u_0 と u_1 に相應する時刻を T_0 及び T_1 とし，又，挿入算の時刻を T とすると；

$$(T-T_0)/(T_1-T_0)\equiv t$$

は，此の間隔を單位として，T_0 以後の時間を表はしたものである．例へば，この間隔を2日とし，計算時刻より8時間後の u を求めようとする場合には，

$$t=8\div 48=0.1666\cdots\cdots\cdots$$

若し，t が整數ならば，$t=n$ とすれば宜いのであつて，式(3)から

$$u_t=u_0+t\,\varDelta'_{1/2}+\frac{t(t-1)}{1.2}\varDelta''_1+\frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\varDelta'''_{3/2}+\cdots\cdots\cdots \qquad (4)$$

これが“ニウトンの挿入式”(Newton's Inferpolation Formula) と呼ぶもので，他の總ての式の基礎である．

12. 挿入式の變換 ニウトンの式では $\varDelta'_{1/2}$，$\varDelta''_1$，$\varDelta'''_{3/2}$ 等の如き各次の差は，(*B*)に於いて半行づつ下位のものとなつてゐるが，若し同じ行にある差のみを採るやうにすれば，收減は一層速くなる．これがためには，次ぎの如く變換算を行う．

（すべて，挿入算の行はれるやうな場合には，第6差以下の差は結果に殆んど影響しないものであるから，こゝでは，第5差を皆同じものと考へ，從つて，第6差以下は消えるものと假定する．）

さて，まづ2行目毎の差が用ひられるやうな式を考へることとし，即ち，下の方式による數値で u_t を表はする：

$$\left.\begin{matrix} u_0 & \cdots & \varDelta''_0 & \cdots & \varDelta^{\text{iv}}_0 & \cdots \\ \cdots & \varDelta'_{1/2} & \cdots & \varDelta'''_{1/2} & \cdots & \varDelta^{\text{v}}_{1/2} \end{matrix}\right\} \qquad (b)$$

(4) 式の中に用ひられてゐる差を，すべて此等の文字で表はすと，

$$\begin{aligned}
\varDelta''_1 &= \varDelta''_0+\varDelta'''_{1/2}\\
\varDelta'''_{3/2} &= \varDelta'''_{1/2}+\varDelta^{\text{iv}}_1=\varDelta'''_{1/2}+\varDelta^{\text{iv}}_0+\varDelta^{\text{v}}_{1/2}\\
\varDelta^{\text{iv}}_2 &= \varDelta^{\text{iv}}_0+2\varDelta^{\text{v}}_{1/2}+\varDelta^{\text{vi}}_1\\
\varDelta^{\text{v}}_{5/2} &= \varDelta^{\text{v}}_{1/2}+2\varDelta^{\text{vi}}_1+\varDelta^{\text{vii}}_{3/2}
\end{aligned}$$

これ等を(4)に入れ，尙，前記の如く，$\Delta^{vi}=\Delta^{vii}=\cdots\cdots=0$ とすれば，

$$\left.\begin{aligned} u_t-u_0 &= t\Delta'_{1/2}+\frac{t(t-1)}{1.2}\Delta''_0+\frac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3}\Delta'''_{1/2} \\ &\qquad +\frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^{iv}_0+\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{1.2.3.4.5}\Delta^{v}_{1/2} \\ \text{又は}\qquad &= t\Delta'_{1/2}+\frac{t(t-1)}{1.2}\Delta''_0+\frac{t(t^2-1)}{1.2.3}\Delta'''_{1/2} \\ &\qquad +\frac{t(t^2-1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^{iv}_0+\frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^{v}_{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

次ぎに，これと同樣にして，一行上の差を用ひれば，

$$\left.\begin{array}{cccccc} \cdots & \Delta'_{-1/2} & \cdots & \Delta'''_{-1/2} & \cdots & \Delta^{v}_{-1/2} \\ u_0 & \cdots & \Delta''_0 & \cdots & \Delta^{iv}_0 & \cdots \end{array}\right\} \tag{c}$$

この場合には，

$$\begin{aligned} \Delta'_{1/2} &= \Delta'_{-1/2}+\Delta''_0 \\ \Delta'''_{1/2} &= \Delta'''_{-1/2}+\Delta^{iv}_0 \\ \Delta^{v}_{1/2} &= \Delta^{v}_{-1/2}+\Delta^{vi}_0=\Delta^{v}_{-1/2} \end{aligned}$$

であるから，(5)の中に入れれば，

$$\begin{aligned} u_t-u_0 &= t\Delta'_{-1/2}+\frac{t(t+1)}{1.2}\Delta''_0+\frac{t(t^2-1)}{1.2.3}\Delta'''_{-1/2} \\ &\qquad +\frac{t(t^2-1)(t+2)}{1.2.3.4}\Delta^{iv}_0+\frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^{v}_{-1/3} \end{aligned} \tag{6}$$

次ぎに，(c) の直ぐ下の差を用ひて，第3回の變換をする．即ち，

$$\left.\begin{array}{cccccc} u_0 & & & & & \\ \cdots & \Delta'_{1/2} & \cdots & \Delta'''_{-1/2} & \cdots & \Delta^{v}_{1/2} \\ u_1 & \cdots & \Delta''_1 & \cdots & \Delta^{iv}_1 & \cdots \end{array}\right\} \tag{d}$$

これ等の差を(6)の中に入れ，$t'=t+1$ として，$u_{t+1}-u_1$ を計算すると，即ち $u_{t'}-u_1=n_{t'}-u_0-\Delta'_{1/2}$ であるから，(6)の中に於いて，t の代りに $t'-1$ を用ひ，$'$ を省くと，

$$\begin{aligned} u_t-u_0 &= t\Delta'_{1/2}+\frac{t(t-1)}{1.2}\Delta''_1+\frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\Delta'''_{1/2} \\ &\qquad +\frac{t(t^2-1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^{iv}_1+\frac{t(t^2-1)(t-2)(t-3)}{1.2.3.4.5}\Delta^{v}_{1/2} \end{aligned} \tag{7}$$

この(5)，(6)，(7)の三つの式は皆同じ2行中の差のみを用ひたもので，便利なものである．しかし，實際計算上に最良の式を得るためには，更に一回の變換が必要である．

(B) を見ると，整數を指數とした Δ'，Δ'''，∇^{v} 等や，分數を指數とした Δ''，

Δ^{iv}, Δ^{vi} 等は無くて，それ等の場所は空いてゐる．この空き間に，今

$$\Delta_{i+1/2}=1/2(\Delta_i+\Delta_{i+1}) \tag{8}$$

といふ式で表はされる値を書き埋めることとする．即ち，この各々の空き間の上と下との和の半分を書き，指數も亦上下の和の半分を以つて表はす．これ等の符號を次節に於いて用ひる．

13. スターリングの挿入式 (Stirling's Interpolation Formula) この式では，前節の式 (8) に定義したものを採用して，

$$u_0,\qquad \Delta'_0,\qquad \Delta''_0,\qquad \Delta'''_0,\qquad \Delta^{\mathrm{iv}}_0,\qquad \Delta^{\mathrm{v}}_0,\qquad 等$$

を用ゐる．即ち，(5) と (6) との和の半分を採ると，

$$u_t=u_0+t\Delta'_0+\frac{t^2}{1.2}\Delta''_0+\frac{t(t^2-1)}{1.2.3}\Delta'''_0+\frac{t^2(t^2-1)}{1.2.3.4}\Delta^{\mathrm{iv}}_0+\frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^{\mathrm{v}}_0+\cdots\cdots \tag{9}$$

これは，t が正數の場合でも，負數の場合でも，用ひられる．

14. ベッセルの挿入式 (Bessel's Interpolation Formula) この場合には，Δ の方式は

$$\left.\begin{array}{cccccc} u_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \Delta'_{1/2} & \Delta''_{1/2} & \Delta'''_{1/2} & \Delta^{\mathrm{iv}}_{1/2} & \Delta^{\mathrm{v}}_{1/0} \\ u_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\} \tag{e}$$

とし，(5) と (7) との和の半分を採つて，

$$u_t-u_0=t\Delta'_{1/2}+\frac{t(t-1)}{1.2}\Delta''_{1/2}+\frac{t(t-1)(t-1/2)}{1.2.3}\Delta'''_{1/2}+\frac{t(t^2-1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^{\mathrm{iv}}_{1/2}+\frac{t(t^2-1)(t-2)(t-1/2)}{1.2.3.4.5}\Delta^{\mathrm{v}}_{1/2} \tag{10}$$

これがベッセル式の普通の形である．

上記のスターリング式は，奇數差 (Δ'_0, Δ'''_0, Δ^{v}_0 等) が t の奇數乘のみを有ち，偶數差 (Δ''_0, Δ^{iv}_0 等) が t の偶數乘のみを有つてゐるので，ベッセル式よりも簡單であるが，しかし，u_0 と n_1 との間の空き間を

$$1/2(u_0+u_1)\equiv u'_{1/2}$$

といふ式によつて作つた數値で埋め，

$$t'=t-1/2 \qquad 即ち \qquad t=t'+1/2$$

として，もつと對稱的な形にすることが出來る．まづ，式 (10) に對しては

$$u_0=u_{1/2}-1/2\Delta'_{1/2} \qquad u_t=u_{1/2+t'}$$

故に，

$$u_t-u_0=u_{1/2+t'}-u'_{1/2}+1/2\Delta'_{1/2}$$

それから，(10) により，

$$u_{1/2+t'}=u'_{1/2}+t'\Delta'_{1/2}+\frac{t'^2-1/4}{1.2}\Delta''_{1/2}+\frac{t'(t'^2-1/4)}{1.2.3}\Delta'''_{1/2}$$
$$+\frac{(t^2-1/4)(t'^2-9/4)}{1.2.3.4}\Delta^{\mathrm{iv}}_{1/2}+\frac{t'(t'^2-1/4)(t'^2-9/4)}{1.2.3.4.5}\Delta^{\mathrm{v}}_{1/2}\qquad(12)$$

これは，スタトリング式と同樣に對稱的である．

單に一つや二つ別々の挿入算をする場合ならば，(8), (9), (10) の式の何れでも同樣に便利である．又，實用上には，(7) を，下の如く括弧に纒めて用ひるのが更に便利である．

$$u_t=u_0+t\left[\Delta'_{1/2}+\frac{t-1}{2}\left\{\Delta''_1+\frac{t-2}{3}\left(\Delta'''_{1/2}+\frac{t+1}{4}(\Delta^{\mathrm{iv}}_1+\cdots\cdots)\right)\right\}\right]\qquad(13)$$

挿入算の最も普通の應用は，第11節に記した第 ii の場合 (第二應用法) である．かやうな挿入算は，元の間隔の 1/2, 1/3, 1/5 等の新しい間隔に對するものであつて，屢々“二分ノ一の挿入算”“三分ノ一の挿入算”などと呼ばれる．この種の挿入算の最も迅速なやり方は，挿入列の第一差を計算し，これ等の差を順次に加へて，所要の數値を獲るのである．次ぎに，此の實地の例を示すが，之は著者の“五桁對數表への入門”から主として採つたものである．

15. 二分ノ一の挿入算　310, 320, 330 ………360 の對數から，315, 325, 335 ………355 の對數を求むること．之れには，$t=1/2$ とすると，ベッセル係數の値は次ぎの如くなる．

$$\frac{t(t-1)}{2}=\frac{1}{8},\qquad\frac{t(t-1)(t-1/2)}{6}=0,\qquad\frac{t(t^2-1)(t-2)}{24}=\frac{3}{128}$$

これ以下の係數は無影響であるから省略する．故に，一般に若し 300, 310…… 等の數のうち，連續する 2 數を a_0 及び a_1 とすれば，

$$\left.\begin{aligned}\log(a_0+5)&=\log a_0+\left(\frac{1}{2}\Delta'_{1/2}-\frac{1}{8}\frac{\Delta''_0+\Delta''_1}{2}+\frac{3}{128}\frac{\Delta^{\mathrm{iv}}_0+\Delta^{\mathrm{iv}}_1}{2}\right)\\\log(a_1-5)&=\log a_1-\left(\frac{1}{2}\Delta'_{1/2}+\frac{1}{8}\frac{\Delta''_1+\Delta''_1}{2}-\frac{3}{128}\frac{\Delta^{\mathrm{iv}}_0+\Delta^{\mathrm{iv}}_1}{2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

(但し，$\Delta'_{1/2}$ は $\log a_0$ と $\log a_1$ との差である.) ところが，$a_0+5=a_1-5$ であるから，この二つの式は要するに同じ數値を表はす二種の式であつて，共に計算の正確さを檢査するのに用ゐられる．そのためには，下の二つの數値を計算する．

$$\left.\begin{aligned}\log(a_0+5)-\log a_0&=\frac{1}{2}\Delta'_{1/2}-\frac{1}{8}\frac{\Delta''_0+\Delta''_1}{2}+\cdots\cdots\cdots\\\log a_1-\log(a_0-5)&=\frac{1}{2}\Delta'_{1/2}+\frac{1}{8}\frac{\Delta''_0+\Delta''_1}{2}-\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

この計算の最も便利で迅速なやり方は下表に示す通りで，必要な數字は皆記載してあるし，上部の (a) (b) (c)……(i) は各行を書き下す順序を示すものである．

(a)	(b) (i)	(h)	(g)	(f)	(e)	(c)	(d)
數	對　數	差	$\frac{1}{2}\Delta'_{1/2}$	$\frac{1}{8}\frac{\Delta''_0+\Delta''_1}{2}$	$\frac{\Delta''_0+\Delta''_1}{2}$	Δ'	Δ''
310	2.49136						
		695					
315	2.49831		689.5	−5.5	−44	1379	
		684					
320	2.50515						−43
		673					
325	2.51188		668.0	−5.1	−41	1336	
		663					
330	2.51851						−39
		653					
335	2.52504		648.5	−4.8	−38	1297	
		644					
340	2.53148						−38
		634					
345	2.53782		629.5	−4.6	−37	1259	
		625					
350	2.54407						−36
		616					
355	2.55023		511.5	−4.3	−34	1223	
		607					
360	2.55630						

こゝで，(*e*) の行の計算は，次ぎの式によつて行ふ．

$$\frac{\Delta''_0+\Delta''_1}{2}=\Delta''_0+\frac{1}{2}\Delta'''_{1/2}=\Delta''_1-\frac{1}{2}\Delta'''_{1/2}$$

そして，0, 1, 1/2 等の指數は，計算に用ひる差へ，順に入れるのである．殆んど相等しい二數の和の半分を此のやうにして計算することは，加へて 2 で割るよりも遙かに容易である．

(*f*) と (*g*) との二行に於いては，加算によつて誤りが入らないために，第6桁まで計算するのであつて，かうした注意は，元の數と，所要の數とが，同じ正確さを維持するために，常に必要である．

(*h*) の行は (15) 式に據つて (*f*) と (*g*) とを加減して獲られるが，この場合，第 6 桁は最早や不必要であるから省略される．かやうにして出來た數は，(15) 式で明らかな如く，之の數列と所要の數列との間の第一差である．そこで，この數列の最初の對數を

$$\log 310 = 2.49136$$

と書き，それから順に，差を加算して，

$$\begin{aligned}\log 315 &= \log 310 + 695\\ \log 320 &= \log 315 + 684\\ \log 325 &= \log 320 + 673\\ \cdots\cdots &= \cdots\cdots + \cdots\cdots\end{aligned}$$

若し計算が正しければ，一つ置きの對數は，與へられた元の數と一致する筈である．——讀者諸氏の練習のために，この方法を尙 450 ぐらゐまで追算するやう薦める．（つづく）